

Cours 3

Rappel

Thm (Jordan-Hölder) Soit G un groupe fini,

- $\exists$ une suite de composition

$$\{0\} = G_n \subsetneq G_{n-1} \subsetneq \dots \subsetneq G_1 \subsetneq G_0 = G$$

tg G_{i-1}/G_i est simple.

- De plus, (la suite n'est pas forcément unique)

n et $\{G_{i-1}/G_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ sont déterminés par G .
l'ensemble $\uparrow$ facteurs de J-H de G

"Slogan": Tout groupe fini peut être construit à partir des groupes simples.

Question: Comment construire ?

Constructions Soient H, K deux groupes (finis)

1) produit direct:

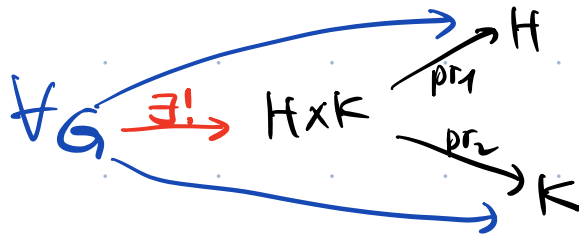
$H \times K$ muni de la loi

$$(h, k) \cdot (h', k') = (hh', kk')$$

et l'élément neutre $= (e_H, e_K)$

cette construction se généralise pour un nombre arbitraire de facteurs: $\prod_{i \in I} H_i$

Propriété universelle ("produit direct est le produit dans 'gps'")



Autrement-dit, $\forall G$ groupe

$$\text{Hom}(G, H \times K) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}(G, H) \times \text{Hom}(G, K)$$

$$\left(\text{Plus généralement, } \text{Hom}(G, \prod_{i \in I} H_i) \xrightarrow{\cong} \prod_{i \in I} \text{Hom}(G, H_i) \right)$$

Preuve : Trivial! (Exo)

2) produit libre

$$H * K := \left\{ \begin{array}{l} \text{mots en lettres } h \in H, k \in K \\ \text{y compris le mot vide noté } e \end{array} \right\}$$

avec loi de gp := concaténation

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{l'élément neutre } e \\ (l_1 l_2 \dots l_n)^{-1} = l_n^{-1} \dots l_1^{-1} \end{array} \right.$$

e.g. $h_1 k_1 h_2 h_2^{-1} k_1^{-1} h_3 k_3$

$$= h_1 k_1 e_H e_H k_1^{-1} h_3 k_3$$

$$= h_1 k_1 e_H k_1^{-1} h_3 k_3$$

$$= h_1 k_1 k_1^{-1} h_3 k_3$$

$$= h_1 e_K h_3 k_3 = h_1 h_3 k_3 = h_1 k_4^{-1} k_4 h_3 k_3 \dots$$

$$\left\{ \begin{array}{l} h_1 h_2 = (h_1 h_2) \\ k_1 k_2 = (k_1 k_2) \\ e_H = e \\ e_K = e \end{array} \right.$$

Exemples $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{ abab \dots a, ab \dots ab, ba \dots ba, ba \dots bab \}$

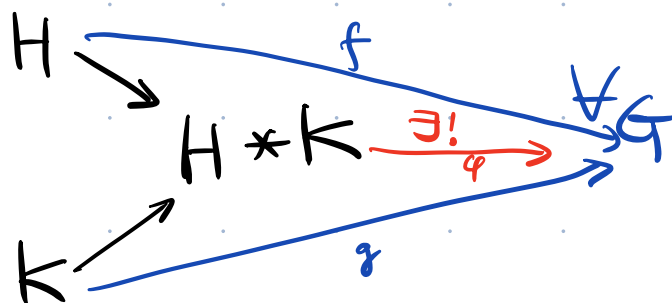
$\swarrow$ g  n  rateurs a $\swarrow$ g  n  rateurs b

$F_2 := \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = \{ a^{n_1} b^{n_2} \dots, n_i \in \mathbb{Z} \}$

$\nearrow$ g  n  rateurs a $\nearrow$ générateurs b

$F_n := \underbrace{\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{n \text{ fois}}$

Propriété universelle ("coproduit dans la catégorie Grp")



$\varphi(h_1 k_1 h_2 k_2 \dots h_n k_n)$
 $= f(h_1)g(k_1)f(h_2)g(k_2) \dots f(h_n)g(k_n)$

Autrement dit :

$\text{Hom}(H * K, G) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}(H, G) \times \text{Hom}(K, G)$

Plus généralement, si $\{H_i\}_{i \in I}$ est une collection de gp.

alors $\forall G$ gp.

$\text{Hom}\left(\bigstar_{i \in I} H_i, G\right) \cong \prod_{i \in I} \text{Hom}(H_i, G)$

3) Produit semi-direct

Def Une suite exacte courte est une suite de morphismes de gps.

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} H \longrightarrow 1$$

où N, G, H sont des gps, et f, g sont des morphismes.

$$\text{tq } \begin{cases} \bullet f \text{ est injectif} \\ \bullet g \text{ est surjectif} \\ \bullet \text{Im}(f) = \ker(g) \end{cases}$$

Rq Donc la donnée d'une suite exacte courte
 $\iff$ la donnée d'un sous-groupe distingué $f(N) \triangleleft G$
et d'un isom. $G/f(N) \cong H$.

Exemple Soit $N \triangleleft G$, alors on a une suite exacte courte

$$\textcircled{*} \quad 1 \longrightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} G/N \longrightarrow 1$$

où i est l'inclusion, et π est la projection.

1^{er} thm fond. gp dit que toute suite exacte courte
est isom à une suite de la forme $\textcircled{*}$.

Déf (Section)

Soit $1 \rightarrow N \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} H \rightarrow 1$ une suite exacte courte.

Une section de g est un morphisme de groupe

$$H \xrightarrow{s} G$$

$$\text{tg} \quad g \circ s = \text{id}_H.$$

Rq En particulier, s est injectif
 g est surjectif.

Déf ("externe") Un groupe G est un produit semi-direct
de groupes N et H , noté $G \cong N \rtimes H$,
si on a une suite exacte courte avec section

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} H \longrightarrow 1$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_s$

Déf ("interne") Soit G un gp avec $N \triangleleft G$, $H < G$.
 G est dit un produit semi-direct de N et H
(noté $N \rtimes H$), si :

$$\begin{cases} (i) & N \cap H = \{1\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (ii) & N \cdot H = G, \text{ i.e. } \forall g \in G \exists n \in N, h \in H \text{ tq } g = nh. \end{cases}$$

Rq: (i) $\Rightarrow$ n et h sont déterminés par g dans (ii)

Lien des 2 Définitions

$$\boxed{\text{Interne} \rightsquigarrow \text{Externe}} \quad N \triangleleft G, H < G \text{ tq } \begin{cases} N \cap H = \{1\} \\ N \cdot H = G \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1 \rightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} G/N \rightarrow 1$$

est une suite exacte courte.

on considère le morphisme

$$\begin{array}{ccccc} H & \xrightarrow{i} & G & \xrightarrow{\pi} & G/N \\ & \searrow \quad \quad \quad \nearrow & & & \\ & \quad \quad \quad f & & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \ker(f) &= \{h \in H \mid f(h) = 1_{G/N}\} \\ &= \{h \in H \mid h \in N\} \\ &= H \cap N = \{1\} \end{aligned}$$

i.e. f est injectif

$$\bullet \quad \forall [g] \in G/N, \text{ on écrit } g = nh \text{ pour } n \in N, h \in H$$

$$\Rightarrow [g] = [h] = f(h)$$

i.e. f est surjectif

Donc f est un isom.

$$\text{De plus } s = j \circ f^{-1} : G/N \rightarrow G$$

est une section de $\pi : G \rightarrow G/N$

$$\left(\text{car } \pi \circ s = \pi \circ j \circ f^{-1} = f \circ f^{-1} = \text{id} \right)$$

CEL: on a une suite exacte
courte avec section =

$$1 \rightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{f^{-1} \circ \pi} H \rightarrow 1$$

$\xleftarrow{j}$

$$\left(\text{ou } 1 \rightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} G/N \rightarrow 1 \right)$$

$\xleftarrow{j \circ f^{-1}}$

Externe $\rightsquigarrow$ Interne

Si on a une suite exacte courte avec section:

$$1 \longrightarrow K \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} L \longrightarrow 1$$

$\xleftarrow{s}$

• $N := f(K) \xrightarrow{(f \text{ inj})} K$
 hypothèse
 comme $N = \ker(g)$, $N \triangleleft G$

• $H := s(L) \xrightarrow{(s \text{ inj})} L$

• $N \cap H = \{e_G\}$

$k \in K, l \in L$

soit $x = f(k) = s(l)$

$$\Rightarrow g(x) = \underbrace{g(f(k))}_{\substack{\parallel \\ e_L}} = \underbrace{g(s(l))}_{\substack{\parallel \\ g \circ s = \text{id}}} = l$$

$\Rightarrow l = e_L \Rightarrow x = s(l) = e_G \quad \square$

• $N \cdot H = G$

$\forall x \in G, h := s(g(x)) \in H$

$n := x h^{-1}$

$g(n) = g(x h^{-1}) = g(x) \cdot g(h)^{-1} = g(x) \cdot \widetilde{g(s(g(x)))}^{-1} = e_L$

$$\Rightarrow n \in \ker(g) = \text{Im}(f)$$

$$\Rightarrow n = f(k) \quad \text{pour } k \in K$$

$$\in N$$

□

CCL : Deux Définitions sont équivalentes.

Soit G un produit semi-directe ^(interne) de N et H
avec $N \triangleleft G$, $H < G$.

on a une action de conjugaison de H sur N

$$H \times N \longrightarrow N$$

$$(h, n) \longmapsto hnh^{-1} =: {}^h n$$

$$\Rightarrow (n_1 h_1) \cdot (n_2 h_2) = n_1 (h_1 n_2 h_1^{-1}) h_1 h_2$$

$$\Rightarrow (n_1 h_1) \cdot (n_2 h_2) = (n_1 \cdot {}^{h_1} n_2) (h_1 h_2)$$

Le produit semi-directe G est déterminé par
 N , H et une action de H sur N .

Notation $G = N \rtimes_{\varphi} H$

Reconstruction

Soient N, H deux groupes

Soit $\varphi: H \rightarrow \text{Aut}(N)$ un morphisme de groupe
 $h \mapsto \varphi(h)$

Alors on construit un groupe comme suit:

$G := N \times H$ comme un ensemble

avec la loi

$$(n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2) := (n_1 \cdot \varphi(h_1)(n_2), h_1 h_2)$$

et l'élément neutre $:= (e_N, e_H)$

Exo • Vérifier que G est bien un groupe

(Indication: chercher la formule si c'était
un produit semi-direct interne)

• Établir que $G = N \rtimes_{\varphi} H$, i.e.

construire une suite exacte courte avec ~~set~~

$$1 \rightarrow N \rightarrow G \begin{array}{c} \rightarrow \\ \leftarrow \end{array} H \rightarrow 1$$

(Indication/Encouragement: Toutes les flèches
sont faibles à construire.)

Exemples: $(1) \quad 1 \xrightarrow{(12)} A_n \rightarrow S_n \xrightleftharpoons[\text{id}]{\text{sgn}} \{\pm 1\} \rightarrow 1$

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} \text{id} & \longleftarrow & +1 \\ & & \\ (12) & \longleftarrow & -1 \end{array}$$

$$\Rightarrow S_n \cong A_n \rtimes_{\varphi} \{\pm 1\}$$

où l'action $\varphi : \{\pm 1\} \times A_n \longrightarrow A_n$
 $(-1, \sigma = (12 \dots n)) \mapsto (12) \circ \sigma \circ (12)$

(2) Soient N, H deux gps
 avec H agit trivialement N

$$N \rtimes_{\text{triv}} H = N \times H \quad \text{le produit direct.}$$

(3) $\mathbb{K} : \text{corps}$

$$1 \rightarrow SL_n(\mathbb{K}) \rightarrow GL_n(\mathbb{K}) \xrightleftharpoons[\text{id}]{\det} GL_1(\mathbb{K}) \rightarrow 1$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \longleftarrow \lambda$$

$$\Rightarrow GL_n(\mathbb{K}) \cong SL_n(\mathbb{K}) \rtimes_{\varphi} GL_1(\mathbb{K})$$

avec l'action φ donnée par

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^{\times} \times SL_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & SL_n(\mathbb{K}) \\ (\lambda, M) & \longmapsto & (\lambda_{1 \dots n}) M (\lambda_{1 \dots n}^{-1}) \end{array}$$

Revenons à la

Question générale : Comment construire ?

- Le groupe n'est pas déterminé par ses facteurs de J-H.
(e.x. produit direct v.s. produit semi-direct)

Analogie en chimie, $\exists$ des Isomères !

même atomes, différents molécules.
(C_4H_{10} butane et isobutane).

- $\exists$ des groupes qui ne sont pas le produit semi-direct des facteurs J-H.

↳ Extension de groupes

Déf. Une extension de groupes est une suite exacte courte

$$1 \rightarrow N \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 1$$

G est appelé une extension de H par N .

- Si $N \subset Z(G) := \text{centre de } G$
(en particulier N est abélien)

Alors G est appelé une extension centrale
de H par N .

- $\exists$ Théorie bien établie de classification des
extensions centrales.
(par algèbre homologique)

§ Groupes nilpotents et résolubles

Def Soit G un gp.

$DG := [G, G] :=$ le sous-gp de G engendré par
les éléments de la forme $xyx^{-1}y^{-1}$
($x, y \in G$) $\begin{matrix} \text{!!} \\ [x, y] \end{matrix}$

appelé le groupe dérivé de G .

Lemme 1 $DG \triangleleft G$

Preuve : $g([x_1, y_1] \cdots [x_n, y_n])g^{-1}$
 $= [gx_1g^{-1}, gy_1g^{-1}] \cdots [gx_ng^{-1}, gy_ng^{-1}] \in DG. \quad \square$

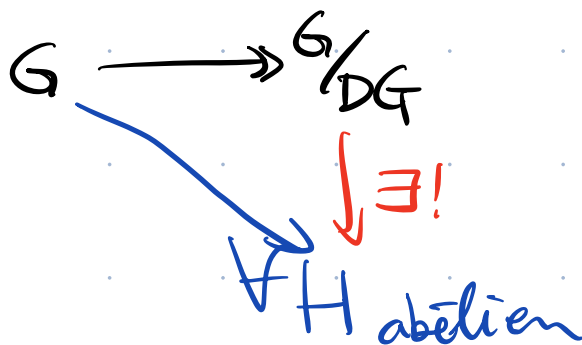
Lemme 2 G/DG est abélien.

Preuve: $\forall [g_1], [g_2] \in G/DG$.

$$[g_1][g_2][g_1]^{-1}[g_2]^{-1} = [\underbrace{g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}}_{\substack{\uparrow \\ DG}}] = e_{G/DG}$$

$$\Rightarrow [g_1][g_2] = [g_2][g_1] \quad \square$$

Propriété universelle



i.e. $\forall H$ groupe abélien,

$$\text{Hom}(G, H) \cong \text{Hom}(G/DG, H)$$

Exemples • $D(GL_n(\mathbb{K})) = SL_n(\mathbb{K})$

$$GL_n(\mathbb{K}) / D(GL_n(\mathbb{K})) \cong GL_n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{\times}$$

$$\bullet \quad D(S_n) = A_n$$

$$S_n / A_n \cong \{\pm 1\}$$

Def. (Suite dérivée) Soit G un gp (fini)

La suite $G = G_0 \triangleright DG \triangleright D^{(2)}G \triangleright \dots \triangleright D^{(n)}G \triangleright \dots$

est appelée la suite dérivée de G

(Rq si G est fini, la suite dérivée se stabilise après un nombre fini d'étape.)

• (Groupe résoluble) si $\exists n \geq 0$ tq

$$D^{(n)}G = \{0\},$$

On dit que G est résoluble.

et le plus petit n , avec $D^{(n)}G = \{0\}$ est appelée la classe de G .

Prop Soit G un groupe fini. Les suivants sont équivalents:

(i) G est résoluble.

(ii) G admet une suite

$$\{0\} = G_n \triangleleft G_{n-1} \triangleleft \dots \triangleleft G_2 \triangleleft G_1 \triangleleft G_0 = G$$

avec G_{i-1}/G_i est abélien. $\forall i$.

$$\Downarrow (iii) \quad G \text{ admet une suite} \\ \{1\} = G_n \triangleleft G_{n-1} \triangleleft \dots \triangleleft G_2 \triangleleft G_1 \triangleleft G_n = G$$

avec G_{i-1}/G_i est cyclique d'ordre premier $\forall i$.

Preuve. $(iii) \Rightarrow (ii) \quad \checkmark$

$(ii) \Rightarrow (i)$: par récurrence sur $|G|$.

$$G/G_1 \text{ abelian} \implies G_1 > D G$$

H.I. $\implies G_1$ est résoluble

résolubilité est
héritée par sous-gp $\implies D G$ est résoluble

$\implies G$ résoluble

$(i) \Rightarrow (iii)$ on a une suite

$$\{1\} = D^{(n)} G \triangleleft \dots \triangleleft D^{(1)} G \triangleleft D G \triangleleft G$$

Pour avoir (iii), il suffit de raffiner cette suite
comme suit: $\forall i$,

$$D^{(i+1)} G \triangleleft D^{(i)} G$$

on a $H_i = D^{(i)} G / D^{(i+1)} G$ abelian fini.

$$\xRightarrow[\text{de str.}]{\text{Thm}} H \cong \bigoplus_i \mathbb{Z} / p_i^{n_i} \mathbb{Z}$$

Donc H admet une suite

$$0 \triangleleft \mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p_2\mathbb{Z} \triangleleft \dots \triangleleft H$$

De plus $\forall p$ premier, $\forall m \geq 1$, on a une suite

$$\{0\} \triangleleft \frac{p\mathbb{Z}}{p^m\mathbb{Z}} \triangleleft \dots \triangleleft \frac{p\mathbb{Z}}{p^m\mathbb{Z}} \triangleleft \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$$

Sautem

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \quad \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \quad \dots \quad \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \quad \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ on a un raffinement de la suite dérivée
avec facteurs cyclique d'ordre premier $\square$

Rq Terminologie "résoluble" sera justifiée
par la théorie de Galois.
(liée à la résolubilité d'équation polynomiale).

Def Un groupe G est nilpotent si
la suite suivante se stabilise à $\{0\}$

$$G = G^0 \triangleright [G, G] \triangleright [G, D_G] \triangleright [G, G^2] \dots$$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & \parallel & \\ D_G & [G, [G, G]] & \\ \parallel & \parallel & \\ G^1 & G^2 & \end{array}$$

$$\text{ou } G^i := [G, G^{i-1}] = \langle [x, y] \mid \begin{matrix} x \in G \\ y \in G^{i-1} \end{matrix} \rangle$$

Rq Par récurrence sur i , on a
 $G^i \supset D^{(i)}G \quad \forall i$.

Donc nilpotent $\Rightarrow$ résoluble.

Exemple

- $GL_n(\mathbb{K})$ n'est pas résoluble car

$$D(GL_n(\mathbb{K})) = SL_n(\mathbb{K})$$

$$\text{or } D(SL_n(\mathbb{K})) = SL_n(\mathbb{K})$$

- A_n n'est pas résoluble pour $n \geq 5$
 (Thm de Galois)

- Un Groupe abélien est nilpotent, car $DG = \{0\}$

- Produit des gp $\begin{matrix} \text{résolubles} \\ \text{nilpotents} \end{matrix}$ est $\begin{matrix} \text{résoluble} \\ \text{nilpotent} \end{matrix}$